DS n°3 : Applications, fonctions usuelles, intégration – Corrigé

Noté sur 105 pts ±5 pts pour le soin et la clarté,
puis la note est divisée par 5 pour faire une note sur 20.

Exercice 1 : Calcul d'intégrales (21,5 pts)

Les questions suivantes sont indépendantes.

1) Calculer $\displaystyle\int_0^1 t\arctan t\,dt$ **(4,5 pts)**

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t\arctan t\,dt &= \left[\frac{t^2}{2}\arctan t\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^2}{2(1+t^2)}dt\\
&= \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4} - 0 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt\\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt\\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left(\int_0^1 dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt\right)\\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left([t]_0^1 - [\arctan t]_0^1\right)\\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\\
&= \boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

2) Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln t}{t(\ln t)^2 - 4t}\,dt$ **(5 pts)**

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{\ln t}{t(\ln t)^2 - 4t}dt &= \int_1^2 \frac{\ln t}{(\ln t)^2 - 4}\,\frac{dt}{t} \qquad \begin{cases} u = \ln t\\ du = \frac{1}{t}dt\end{cases}\\
&= \int_0^{\ln 2} \frac{u}{u^2-4}\,du\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\ln 2} \frac{2u}{u^2-4}\,du\\
&= \frac{1}{2}\left[\ln\left|u^2-4\right|\right]_0^{\ln 2}\\
&= \frac{1}{2}\left(\ln\left|(\ln 2)^2-4\right| - \ln|-2|\right)\\
&= \frac{1}{2}\left[\ln\left(4-(\ln 2)^2\right) - \ln 2\right] \qquad \text{car } (\ln 2)^2 < 2^2 = 4\\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4-(\ln 2)^2}{\ln 2}\right)\\
&= \boxed{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{\ln 2} - \ln 2\right)}
\end{aligned}$$

3) Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{3+\cos^2 x}\,dx$ **(6 pts)**

(Par les règles de Bioche, on sait que $u = \sin x$ va fonctionner : on met donc l'intégrale “sous la bonne forme”)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{3+\cos^2 x}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{4-\sin^2 x}dx \qquad \begin{cases} u = \sin x\\ du = \cos x\,dx\end{cases}\\
&= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{4-u^2}\\
&= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{(2-u)(2+u)}\\
&= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{\frac{1}{4}}{2-u} + \frac{\frac{1}{4}}{2+u}\right)du
\end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{3+\cos^2 x}dx = \frac{1}{4}\left[-\ln|2-u|+\ln|2+u|\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$
$$= \frac{1}{4}\left(-\ln\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\ln 2+\ln\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\ln 2\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(-\ln\left(\frac{4-\sqrt{2}}{2}\right)+\ln\left(\frac{4+\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$
$$= \boxed{\frac{1}{4}\ln\left(\frac{4+\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}}\right)}$$

4) Soit $b \in \mathbb{R}^*$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{dx}{x-ib}$. Quelle est sa limite quand a tend vers $+\infty$? **(6 pts)**

On a

$$\int_{-a}^{a}\frac{dx}{x-ib} = \int_{-a}^{a}\frac{x+ib}{(x-ib)(x+ib)}dx$$
$$= \int_{-a}^{a}\frac{x}{x^2+b^2}dx + ib\int_{-a}^{a}\frac{1}{x^2+b^2}dx$$
$$= 0+\frac{i}{b}\int_{-a}^{a}\frac{1}{\frac{x^2}{b^2}+1}dx \qquad \text{car } x\mapsto \frac{x}{x^2+b^2} \text{ est impaire}$$
$$= \frac{i}{b}\left[b\arctan\frac{x}{b}\right]_{-a}^{a}$$
$$= i\arctan\frac{a}{b}+i\arctan\frac{-a}{b}$$
$$= 2i\arctan\frac{a}{b}$$

On a $\displaystyle\frac{a}{b}\xrightarrow[a\to+\infty]{}\begin{cases}+\infty & \text{si } b>0\\ -\infty & \text{si } b<0\end{cases}$ et donc

$$\arctan\frac{a}{b}\xrightarrow[a\to+\infty]{}\text{signe}(b)\times\frac{\pi}{2}$$

Ainsi,

$$\int_{-a}^{a}\frac{dx}{x-ib}\xrightarrow[a\to+\infty]{} i\times\text{signe}(b)$$

Exercice 2 : Une application complexe (19,5 pts)

On définit l'application

$$f:\mathbb{C}\setminus\{1\}\to\mathbb{C}$$
$$z\mapsto\frac{\overline{z}+1}{z-1}$$

1) Quels sont les antécédents de 1 par f ? **(3 pts)**

On résout l'équation $f(z)=1$ d'inconnue $z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$.

$$f(z)=1$$
$$\iff \overline{z}+1=z-1$$
$$\iff 2=z-\overline{z}$$
$$\iff 2=2i\,\mathrm{Im}\,z$$
$$\iff \mathrm{Im}\,z=\frac{2}{2i}=-i$$

Or, $\mathrm{Im}\,z\in\mathbb{R}$, ce qui entraine qu'il n'y a pas de solution. Ainsi, $\boxed{\text{1 n'a pas d'antécédent par } f}$.

2) Déterminer l'ensemble $f(i\mathbb{R})$. **(3 pts)**

(On a bien $i\mathbb{R}\subset\mathbb{C}\setminus\{1\}$ donc ce calcul a un sens). Soit $x\in\mathbb{R}$. On a :

$$f(ix)=\frac{\overline{ix}+1}{ix-1}=\frac{-ix+1}{ix-1}=-1$$

Ainsi,

$$\boxed{f(i\mathbb{R})=\{f(ix)\mid x\in\mathbb{R}\}=\{-1\}}$$

3) L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ? **(5,5 pts)**

Par la question 1, l'élément $1\in\mathbb{C}$ n'a pas d'antécédent par f. Ainsi, $\boxed{f \text{ n'est pas surjective}}$. On peut ainsi affirmer que $\boxed{f \text{ n'est pas bijective}}$.

Par la question 2, $f(i)=-1=f(2i)$ mais $i\neq 2i$ donc $\boxed{f \text{ n'est pas injective}}$.

4) Dans cette question, on note $E := \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et g la restriction de f à E.

a) Montrer que $g(E) \subset E$. **(3 pts)**

Soit $y \in g(E)$. Montrons que $y \in E$. Tout d'abord, il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$. On a
$$y = g(x) = \frac{\overline{x}+1}{x-1} = \frac{x+1}{x-1} \in \mathbb{R}$$
Il suffit de montrer que $y \neq 1$. Or,
$$g(x) = 1 \iff x+1 = x-1 \iff 2 = 0$$
cette dernière assertion est fausse, donc $y = g(x) \neq 1$. Finalement, $\boxed{g(E) \subset E}$.

b) Soit $x \in E$. Simplifier $(g \circ g)(x)$. **(1 pt)**

$$(g \circ g)(x) = \frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1} = \frac{x+1+x-1}{x+1-(x-1)} = \frac{2x}{2} = x$$

c) En déduire que g est une bijection de E sur E et déterminer sa réciproque. **(4 pts)**

Par la question précédente, on a $g \circ g = \mathrm{id}_E$. Ainsi, g est une involution : g est donc bijective et $g^{-1} = g$.

Exercice 3 : Relation d'équivalence entre fonctions (25 pts bonus)

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{B}$ l'ensemble des bijections de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On définit sur $\mathcal{A}$ la relation $\mathcal{R}$ de la manière suivante : pour toutes $f, g \in \mathcal{A}$,
$$f \mathcal{R} g \iff \exists \varphi \in \mathcal{B} \quad f = g \circ \varphi$$
Autrement dit, $f\mathcal{R}g$ si et seulement s'il existe une bijection φ de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f = g \circ \varphi$.

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. **(11 pts)**

Soit $f, g, h \in \mathcal{A}$.

- On a $f = f \circ \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ et $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ est clairement une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $f\mathcal{R}f$. Donc $\mathcal{R}$ est réflexive.

- Supposons $f\mathcal{R}g$. Alors $f = g \circ \varphi$ avec $\varphi \in \mathcal{B}$. On en déduit que
$$\begin{aligned} f \circ \varphi^{-1} &= (g \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} \\ &= g \circ (\varphi \circ \varphi^{-1}) \qquad \text{par associativité} \\ &= g \end{aligned}$$
Donc $g = f \circ \varphi^{-1}$. De plus, $\varphi^{-1} \in \mathcal{B}$ car $\varphi \in \mathcal{B}$. Ainsi, $g\mathcal{R}f$: $\mathcal{R}$ est symétrique.

- Supposons $f\mathcal{R}g$ et $g\mathcal{R}h$. Alors il existe $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{B}$ telles que
$$f = g \circ \varphi_1 \qquad \text{et} \qquad g = h \circ \varphi_2$$
donc $f = (h \circ \varphi_2) \circ \varphi_1 = h \circ (\varphi_2 \circ \varphi_1)$. En posant $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$, on a donc $f = h \circ \varphi$. De plus $\varphi \in \mathcal{B}$ car $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{B}$. Donc $f\mathcal{R}h$: $\mathcal{R}$ est transitive.

Finalement, $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2) Soit $f, g \in \mathcal{A}$ telles que $f\mathcal{R}g$. Montrer que si g est injective, alors f est injective. Montrer que si g est surjective, alors f est surjective. **(4 pts)**

Supposons g injective. Alors comme φ est bijective, $f = g \circ \varphi$ est la composée de deux applications injectives donc est injective.

De même, si g est surjective, alors f et surjective.

3) On note $f_0 : x \mapsto 0$ et pour tout $f \in \mathcal{A}$, on note $\overline{f}$ la classe d'équivalence de f pour $\mathcal{R}$. Que vaut $\overline{f_0}$? Que vaut $\overline{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}$? **(4 pts)**

Soit $g \in \mathcal{A}$.
$$\begin{aligned} g \in \overline{f_0} &\iff g\mathcal{R}f_0 \\ &\iff \exists \varphi \in \mathcal{B} \quad g = f_0 \circ \varphi \\ &\iff \exists \varphi \in \mathcal{B} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = f_0(\varphi(x)) \\ &\iff (\exists \varphi \in \mathcal{B}) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = 0 \\ &\iff g \equiv 0 \end{aligned}$$
Ainsi, $g \in \overline{f_0}$ si et seulement si $g = f_0$, d'où $\boxed{\overline{f_0} = \{f_0\}}$. De plus,
$$\begin{aligned} g \in \overline{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}} &\iff g\mathcal{R}\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \\ &\iff \exists \varphi \in \mathcal{B} \quad g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \circ \varphi \\ &\iff \exists \varphi \in \mathcal{B} \quad g = \varphi \\ &\iff g \in \mathcal{B} \end{aligned}$$
Ainsi, $\boxed{\overline{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}} = \mathcal{B}}$.

4) Soit $f \in \mathcal{B}$. Quelle est la classe d'équivalence de f ? **(4 pts bonus)**

Comme $f \in \mathcal{B}$, on a par la question précédente $f \in \overline{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}$. On en déduit que $\boxed{\overline{f} = \overline{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}} = \mathcal{B}}$.

Problème : formules de Leibniz et de Machin (39 pts)

Partie A (20 pts)

1) Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Rappeler la formule donnant $\tan(a+b)$ en fonction de $\tan a$ et $\tan b$, lorsque ces quantités sont bien définies. **(1,5 pt)**

(Soit $a, b \in D_{\tan}$ tels que $a+b \in D_{\tan}$. Alors :)

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

2) À l'aide de cette formule, montrer **soigneusement** que pour tous réels x, y tels que $xy \neq 1$ et $|\arctan x + \arctan y| < \frac{\pi}{2}$,

$$\arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

(6 pts)

On affirme que

$$\begin{aligned} & \arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) \\ \iff & \tan\left(\arctan x + \arctan y\right) = \tan\left(\arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)\right) \end{aligned}$$

En effet pour le sens direct, on peut appliquer la fonction tangente car $\arctan x + \arctan y$ et $\arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$ sont dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Pour le sens réciproque, on applique la fonction arctangente (ce qui est toujours possible car $D_{\arctan} = \mathbb{R}$) et on utilise le fait que

$$\forall z \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\qquad \arctan(\tan z) = z$$

Ainsi, on a bien équivalence. On applique ensuite la formule de la question **1)** avec $a = \arctan x$ et $b = \arctan y$, ce qui est possible car $a, b, a+b$ sont dans $D_{\tan}$. On obtient donc :

$$\tan\left(\arctan x + \arctan y\right) = \frac{\tan(\arctan x) + \tan(\arctan y)}{1 - \tan(\arctan x)\tan(\arctan y)} = \frac{x+y}{1-xy}$$

(car $\tan \circ \arctan = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$). Finalement,

$$\begin{aligned} & \arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) \\ \iff & \frac{x+y}{1-xy} = \tan\left(\arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)\right) \\ \iff & \frac{x+y}{1-xy} = \frac{x+y}{1-xy} \end{aligned}$$

Cette dernière assertion est vraie, donc l'assertion de départ l'est aussi. D'où le résultat.

3) En déduire les formules suivantes :

a) $2\arctan\left(\frac{1}{5}\right) = \arctan\left(\frac{5}{12}\right)$ **(3,5 pts)**

On a $\frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \neq 1$ et comme $0 < \frac{1}{5} < 1$, on a par stricte croissance de l'arctangente

$$\begin{aligned} & \arctan 0 < \arctan\frac{1}{5} < \arctan 1 \\ \Longrightarrow\ & 0 < \arctan\frac{1}{5} < \frac{\pi}{4} \\ \Longrightarrow\ & 0 < \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{5} < \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

On peut donc appliquer la formule de la question précédente :

$$\begin{aligned} 2\arctan\frac{1}{5} &= \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{5} = \arctan\left(\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{5+5}{25-1}\right) \quad = \arctan\frac{10}{24} = \boxed{\arctan\frac{5}{12}} \end{aligned}$$

b) $4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) = \arctan\left(\frac{120}{119}\right)$ **(3,5 pts)**

Par ce qui précède,

$$\begin{aligned} 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) &= 2\arctan\frac{1}{5} + 2\arctan\frac{1}{5} \\ &= \arctan\left(\frac{5}{12}\right) + \arctan\left(\frac{5}{12}\right) \end{aligned}$$

De même, on a $\frac{5}{12}\times\frac{5}{12} \neq 1$, et comme $0 < \frac{5}{12} < 1$, on a encore

$$0 < \arctan\left(\frac{5}{12}\right) + \arctan\left(\frac{5}{12}\right) < \frac{\pi}{2}$$

Donc par la question **2)**,

$$\begin{aligned} 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) &= \arctan\left(\frac{\frac{5}{12}+\frac{5}{12}}{1-\frac{5}{12}\times\frac{5}{12}}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{60+60}{144-5\times5}\right) = \boxed{\arctan\left(\frac{120}{119}\right)} \end{aligned}$$

c) $\arctan\left(\frac{120}{119}\right) - \arctan 1 = \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$ **(4 pts)**

On a tout d'abord,

$$\arctan\left(\frac{120}{119}\right) - \arctan 1 = \arctan\left(\frac{120}{119}\right) + \arctan(-1)$$

On vérifie que $\frac{120}{119}\times(-1) \neq 1$. De plus, $0 < \frac{120}{119}$ donc

$$0 < \arctan\left(\frac{120}{119}\right) < \frac{\pi}{2}$$

et ainsi comme $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$, on a

$$-\frac{\pi}{4} < \arctan\left(\frac{120}{119}\right) + \arctan(-1) < \frac{\pi}{4}$$

On peut donc appliquer la question **2)**,

$$\begin{aligned} \arctan\left(\frac{120}{119}\right) - \arctan 1 &= \arctan\left(\frac{\frac{120}{119}+(-1)}{1-\frac{120}{119}\times(-1)}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{120-119}{119-120\times(-1)}\right) \\ &= \boxed{\arctan\left(\frac{1}{239}\right)} \end{aligned}$$

4) En déduire la *formule de Machin* : $\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$ **(1,5 pt)**

Par la question **3)**,

$$\begin{aligned} \arctan\left(\frac{1}{239}\right) &= \arctan\left(\frac{120}{119}\right) - \arctan 1 \\ &= 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)}$$

Partie B (19 pts)

Soit $n \in \mathbb{N}$.

5) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{1+t^2} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k} = \frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}$. **(3,5 pts)**

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+t^2}-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k} &= \frac{1}{1+t^2}-\sum_{k=0}^{n}(-t^2)^k \\ &= \frac{1}{1+t^2}-\frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1-(-t^2)} \qquad \text{car } -t^2\neq 1 \\ &= \frac{1}{1+t^2}+\frac{-1+(-1)^{n+1}(t^2)^{n+1}}{1+t^2} \\ &= \boxed{\frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}}\end{aligned}$$

6) En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\arctan x-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}=F_n(x)$, où F_n est une primitive d'une fonction à préciser. **(5 pts)**

Par la question précédente, pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a

$$\frac{1}{1+t^2}-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k}=\frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}$$

On intègre cette égalité de 0 à $x\in\mathbb{R}$, ce qui est possible car ces fonctions sont continues :

$$\begin{aligned}&\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt-\int_0^x\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k}\right)dt=\int_0^x\frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}dt \\ \Longrightarrow\ &[\arctan t]_0^x-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^x t^{2k}dt=\int_0^x\frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}dt \\ \Longrightarrow\ &\arctan x-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}=F_n(x)\end{aligned}$$

où F_n est la primitive de la fonction $t\mapsto\frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}$ qui s'annule en 0.

On admet que si f,g sont deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que $f\leq g$ alors : $\forall x\in\mathbb{R}_+\quad \int_0^x f\leq\int_0^x g$.

7) Montrer que $\quad\forall t\in\mathbb{R}\quad -t^{2n+2}\leq F_n'(t)\leq t^{2n+2}$.
En déduire que $\quad\forall x\in[0,1]\quad F_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$. **(7,5 pts)**

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$-t^{2n+2}\leq(-1)^{n+1}t^{2n+2}\leq t^{2n+2}$$

On en déduit que

$$-\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\leq F_n'(t)\leq\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$$

Or, on a $\frac{1}{1+t^2}\leq 1$, et donc $\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\leq t^{2n+2}$. De même, $-t^{2n+2}\leq-\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$. Ainsi,

$$-t^{2n+2}\leq F_n'(t)\leq t^{2n+2}$$

Soit $x\in[0,1]$. Ces fonctions étant continues, en intégrant de 0 à x, on a

$$\begin{aligned}&-\int_0^x t^{2n+2}dt\leq F_n(x)-F_n(0)\leq\int_0^x t^{2n+2}dt \\ \Longrightarrow\ &-\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\leq F_n(x)\leq\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\end{aligned}$$

Or, comme $x\in[0,1]$, la suite $(x^{2n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, si bien que $\lim_{n\to+\infty}\left(\pm\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\right)=0$. Par encadrement, on en déduit que $F_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

8) En déduire la *formule de Madhava-Leibniz* : **(3 pts)**

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots$$

En prenant $x=1$ dans la formule obtenue à la question 2 :

$$\arctan 1-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}=F_n(1)$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans cette égalité, on a par la question 3,

$$\boxed{\frac{\pi}{4}-\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}=0}$$